

Es geht um die Methode der "quadratischen Ergänzung (q.E.)". Kurz gesagt handelt es sich dabei um ein Verfahren zum Lösen von quadratischen Gleichungen (ihr kennt die pq-Formel, dies ist eine andere Möglichkeit).

Eure Aufgabe ist es, Euch in das Prinzip der "q.E." ein zu arbeiten und einige Beispiele soweit zu beherrschen, dass ihr sie euren Mitschülern in der nächsten Stunde (Montag) erklären könnt.

Was funktioniert also die "quadratische Ergänzung"?

Angenommen, ihr habt eine quadratische Gleichung gegeben wie z.B.

$$x^2 + 8 \cdot x + 16 = 9$$

Dies lässt sich einfach mit der 1. binom. Formel lösen:

$$x^2 + 8 \cdot x + 16 = 9$$

$$(x + 4)^2 = 9$$

$$x + 4 = 3$$

und

$$x + 4 = -3$$

$$x = -1$$

und

$$x = -7$$

In solch einem Fall ist die q.E. noch nicht nötig. Wenn man es aber mit weniger "schönen" Zahlen zu tun hat, geht man so vor:

Die Gleichung sei z.B.

$$x^2 + 6 \cdot x + 4 = 0$$

Binom. Formeln können nicht angewendet werden.

Aber es gibt einen Trick:

1.) Die Gleichung wird so umgestellt, dass links nur Terme stehen, die die Variable x (auch x^2) enthalten:

$$x^2 + 6 \cdot x + 4 = 0$$

$$x^2 + 6 \cdot x = -4$$

2.) Man nimmt die Hälfte des Faktors vor dem x (hier also $6:2=3$) und addiert das QUADRAT dieser Zahl auf BEIDEN Seiten der Gleichung dazu. Dadurch ändert sich die Gleichung prinzipiell nicht:

$$x^2 + 6 \cdot x = -4$$

$$x^2 + 6 \cdot x + 3^2 = -4 + 3^2$$

$$x^2 + 6 \cdot x + 9 = 5$$

Hier wurde die Gleichung "quadratisch ergänzt".

Jetzt aber kann Binomi angewendet werden:

$$x^2 + 6 \cdot x + 9 = 5$$

$$(x + 3)^2 = 5$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{5}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{5}$$

und die Gleichung ist gelöst. (Ein anderes Bsp. steht im Buch auf Seite 24 links am Rand.)

Wir benötigen die quadratische Ergänzung nicht zum Lösen, sondern zum Umformen von Gleichungen mit zwei Variablen x und y. Wir gehen so vor:

Ist die Gleichung z.B.

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 6 \cdot y - 6 = 0$$

1. sortieren:

$$x^2 - 2 \cdot x + y^2 + 6 \cdot y = 6$$

2. quadratisch ergänzen:

$$x^2 - 2 \cdot x + (-1)^2 + y^2 + 6 \cdot y + 3^2 = 6 + (-1)^2 + 3^2$$

3. klammern mit binom. Formel:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 19$$

Noch ein Beispiel:

$$x^2 - 4 \cdot x + y^2 + 2 \cdot y - 4 = 0$$

sortieren:

$$x^2 - 4 \cdot x + y^2 + 2 \cdot y = 4$$

ergänzen:

$$x^2 - 4x + (-2)^2 + y^2 + 2y + 1 = 4 + (-2)^2 + 1$$

klammern:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

und noch ein besonders interessantes:

$$x^2 + y^2 - 6y - 27 = 0$$

sortieren:

$$x^2 + y^2 - 6y = 27$$

ergänzen:

$$(x - 0)^2 + y^2 - 6y + (-3)^2 = 27 + (-3)^2$$

klammern:

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

WICHTIG: Beim Ergänzen muss man sich Gedanken über das Vorzeichen des Ergänzungsterms machen!

Bei Fragen: email@herrmallon.de